# MATHEMATIQUES SP III

Durée : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.*

## Objectifs du problème

Le problème a pour objet l'étude de certaines solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre $(E_1)$ : $(E_1)$ $y'' = xy$

Dans la première partie, on montre que toutes les solutions réelles de $(E_1)$ sont développables en série entière, et l'on construit des suites de polynômes approchant une solution uniformément sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.

Dans la deuxième partie, en comparant l'équation $(E_1)$ à une autre équation dont les solutions sont connues, on décrit le comportement oscillatoire des solutions de $(E_1)$ dans $]-\infty,0[$.

La troisième partie enfin est consacrée à l'étude du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une solution de $(E_1)$ définie au moyen d'une représentation intégrale.

**Ces trois parties sont largement indépendantes.**

## PREMIERE PARTIE

### Construction de solutions de $(E_1)$

**1/ Solutions de $(E_1)$ développables en série entière**

a) Montrer qu'il existe une solution unique de $(E_1)$, notée A, telle que $A(0) = 1$ et $A'(0) = 0$.
Montrer de même qu'il existe une solution unique de $(E_1)$, notée B, telle que $B(0) = 0$ et $B'(0) = 1$.

b) A quelles relations doit satisfaire la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que la somme $x \to y(x)$ de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

dont le rayon de convergence R est supposé à priori non nul, soit solution sur $]-R, +R[$ de l'équation $(E_1)$.

c) Montrer que les fonctions A et B sont développables sur $\mathbb{R}$ en série entière ; on écrira ces séries entières sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n} \quad (\text{resp} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{3n+1})$$

et l'on exprimera les coefficients $a_n$ et $b_n$ à l'aide de n et des nombres $\alpha_n$ (resp $\beta_n$) définis par $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, par :

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(2 - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(n - \frac{1}{3}\right),$$
$$\beta_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(2 + \frac{1}{3}\right)\ldots\left(n + \frac{1}{3}\right)$$

d) On désigne par $\Delta$ l'ensemble des solutions réelles de $(E_1)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\Delta$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et donner une base de ce sous-espace vectoriel.

**A SUIVRE**

**2/ Equivalence de $(E_1)$ et d'une équation intégrale**

a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$\int_0^x \left( \int_0^u t\, f(t)\, dt \right) du = \int_0^x t\,(x-t)\, f(t)\, dt$$

b) En déduire que toute solution $x \to y(x)$ de l'équation $(E_1)$ telle que $y(0) = D_1$ et $y'(0) = D_2$, où $D_1$ et $D_2$ sont des réels donnés, vérifie sur $\mathbb{R}$ la relation (1) :

$$(1) \qquad y(x) = D_1 + D_2 x + \int_0^x t\,(x-t)\, y(t)\, dt$$

c) On suppose que $x \to y(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation (1) pour des valeurs particulières des réels $D_1$ et $D_2$. Prouver que y est solution de $(E_1)$.

**3/ Approximation des solutions de $(E_1)$**

Soient $D_1$ et $D_2$ deux constantes réelles données, et P une fonction polynomiale donnée. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$U_0(x) = P(x)$$

et, pour tout $n \geq 0$,

$$U_{n+1}(x) = D_1 + D_2 x + \int_0^x t(x-t)\, U_n(t)\, dt$$

a) Déterminer la suite $(U_n)$ dans chacun des deux cas particuliers suivants :

$P(x) = 1$ , $D_1 = 1$ , $D_2 = 0$,
$P(x) = x$ , $D_1 = 0$ , $D_2 = 1$.

montrer que, dans chacun de ces cas, la suite $(U_n)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé [a,b] vers une solution de $(E_1)$ que l'on précisera.

b) Revenant au cas général, où P(x) est une fonction polynomiale arbitraire et $D_1$ et $D_2$ deux réels donnés quelconques, on pose, $\gamma$ étant un nombre réel positif fixé :

$$\sup \left\{ \left| U_1(t) - U_0(t) \right| ,\ t \in [-\gamma, +\gamma] \right\} = K$$

En exprimant $U_{n+1}(x) - U_n(x)$ en fonction de $U_n(x) - U_{n-1}(x)$ et en utilisant une récurrence, prouver que, pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout x de $[-\gamma, +\gamma]$, on a :

$$\left| U_{n+1}(x) - U_n(x) \right| \leq K a_n |x|^{3n}$$

où les nombres $a_n$ sont ceux définis dans la question 1/ c).

c) Déduire de ce qui précède que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente sur $\mathbb{R}$, uniformément convergente sur tout segment [a,b] de $\mathbb{R}$, et que sa fonction limite est solution de $(E_1)$ sur $\mathbb{R}$.

## DEUXIEME PARTIE Comportement des solutions de $(E_1)$ sur $]-\infty,0[$

Soit Y une solution non nulle de $(E_1)$ sur $]-\infty,0[$. On se propose d'étudier les zéros de Y. Pour cela, on compare cette solution à la fonction Z définie sur $]-\infty,0[$ par :

$$Z(x) = (-x)^{-1/4} \cos\left( \frac{2}{3}(-x)^{3/2} \right)$$

Tournez la page S.V.P.

**1/ Equation différentielle vérifiée par Z**

Montrer que Z vérifie sur $]-\infty,0[$ l'équation différentielle : $Z'' = \left(x + \frac{5}{16x^2}\right) Z$

**2/ Comparaison de Y et de Z**

a) Soient $x_0$ et $x_1$ deux réels distincts ($x_0 < x_1$), de $]-\infty,0[$. Prouver que :

$$\left[Z'(x)\,Y(x) - Y'(x)\,Z(x)\right]_{x=x_0}^{x=x_1} = \frac{5}{16} \int_{x_0}^{x_1} \frac{Y(x)\,Z(x)}{x^2}\,dx$$

b) On suppose que $x_0$ et $x_1$ sont deux zéros consécutifs de la fonction Z sur $]-\infty,0[$ et que la fonction Y reste strictement positive sur $]x_0, x_1[$. Montrer que $\left[Z'(x)\,Y(x) - Y'(x)\,Z(x)\right]_{x=x_0}^{x=x_1}$ a le même signe que Z sur l'intervalle $]x_0, x_1[$.

c) Déduire de ce qui précède que, si $x_0$ et $x_1$ sont deux zéros consécutifs de Z, alors Y s'annule dans $]x_0, x_1[$. Montrer que Y admet dans $]-\infty,0[$ une infinité de zéros.

## TROISIEME PARTIE

### Comportement des solutions bornées de $(E_1)$ au voisinage de $+\infty$

**1/ Espace vectoriel des solutions de $(E_1)$ bornées sur $[0,+\infty[$**

a) Montrer que les solutions A et B de $(E_1)$ ne sont pas bornées sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire que le sous-espace vectoriel des solutions de $(E_1)$ qui sont bornées sur $[0,+\infty[$ est de dimension 1 au plus.

Dans ce qui suit, une telle solution bornée est mise en évidence par une représentation intégrale, et on étudie son comportement au voisinage de $+\infty$.

**2/ Transformation de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$**

Soit y une solution de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$, et z la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$y(x) = \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) z(x).$$

montrer que cette fonction z est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E_2) \qquad z'' - 2\sqrt{x}\,z' - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,z = 0.$$

Pour tout x strictement positif, on pose : $I(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{x}\,t^2\right) \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt.$

**3/ Etude de la fonction I sur $]0,+\infty[$**

Pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout $x \in ]0,+\infty[$, on pose : $I_n(x) = \int_0^{n} \exp\left(-\sqrt{x}\,t^2\right) \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt.$

**A SUIVRE**

a) Prouver la convergence de l'intégrale I(x) pour tout x strictement positif.

b) Montrer que la suite de fonctions $(I_n)$ converge uniformément vers la fonction I sur un intervalle que l'on précisera.

c) Prouver que les fonctions $I_n$ sont de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et que la suite $(I'_n)$ des fonctions dérivées converge uniformément sur tout intervalle [a,b] inclus dans $]0,+\infty[$. En déduire l'existence de la fonction dérivée I' de I sur $]0,+\infty[$, et son expression sous forme d'une intégrale.

d) Prouver que I' est également définie sur $]0,+\infty[$ par : $$I'(x) = -\int_0^{+\infty} t \exp(-\sqrt{x}\, t^2) \sin\left(\frac{t^3}{3}\right) dt$$

e) Prouver que la fonction I est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[$, et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $(E_2)$.

## 4/ Expression intégrale des solutions bornées de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$

a) montrer que la fonction y définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$y(x) = \exp\left(-\frac{2}{3} x^{3/2}\right) I(x)$$

est solution de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$. Déterminer sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Que peut-on en déduire concernant l'ensemble des solutions bornées de $(E_1)$ sur $]0,+\infty[$ ?

## 5/ Etude du comportement de I au voisinage de $+\infty$

Dans ce qui suit, on admet sans démonstration les résultats numériques suivants :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2n} du = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

a) En majorant l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{x}\, t^2) \left| \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1 \right| dt$$

déterminer un équivalent de I(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Plus généralement, déterminer un nombre réel $\lambda$ et une suite $(\delta_k)$ tels que, au voisinage de $+\infty$, et quel que soit l'entier n>0, la différence : $\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta_k}{x^{(6k+1)\lambda}} \right|$ soit majorée par $\frac{|\delta_{n+1}|}{x^{(6n+7)\lambda}}$

**Fin de l'énoncé**